<u>Données</u> :

- **M_t** = masse maximale transportable dans une cabine : 3220 kg.
- **M_c** = masse d'une cabine à vide : 5215 kg (masse de l'ensemble roulant)
- **D_P** = diamètre d'enroulement du câble sur la poulie motrice : 2650 mm. (représentée sur le document **DT A4**)
- Inertie des pièces en mouvement (document **DT A1**).
- Relevé topographique du site (document **DR A2**).
- Caractéristiques du réducteur (document **DT A2** et **DT A3**).
- Caractéristiques du câble tracteur : longueur 5520 m, masse linéique 2.65 kg/m.
- **V** : vitesse d'une cabine exprimée en $m.s^{-1}$
- **g** (gravité terrestre à l'altitude) : $9.81 m.s^{-2}$
- η_{red} (rendement du réducteur) : 0.95
- η_{PC} (rendement du système poulie/câble) : 0.9
- **θ** = angle d'inclinaison entre la direction horizontale et le câble tracteur (voir document **DR A1**).
- Ω : vitesse angulaire de **l'arbre moteur** exprimée en $rad.s^{-1}$.
- Ω_p : vitesse angulaire de **la poulie motrice**, exprimée en $rad.s^{-1}$

<u>Notations utilisées</u>:

- **C_m** = Couple nécessaire à fournir sur l'arbre moteur.
- **$C_{résistant/mot}$** = Couple résistant à fournir sur l'arbre moteur pour équilibrer la charge.
- **C_{dyn}** = Couple dynamique ou couple accélérateur à fournir sur l'arbre moteur.
- **J_i** = Inertie de la pièce i exprimée en son centre de gravité autour de son axe de rotation.
- **$J_{i/mot}$** = Inertie de la pièce i ramenée sur l'arbre moteur.
- $\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$: accélération angulaire de l'arbre moteur exprimée en $rad.s^{-2}$
- **Z_i** = Nombre de dents de la roue dentée i.

Mise en situation

Les deux cabines sont chargées au maximum. Elles arrivent sur la fin de leur trajet. La cabine aval se déplace donc vers la gare intermédiaire et la cabine amont arrive au Pic du Midi. Suite à une vitesse du vent trop importante, la machine motrice doit être arrêtée et les deux cabines chargées sont stoppées à une position pour laquelle la pente des câbles porteurs, côté Pic du Midi, est maximale **(cas le plus défavorable)**. Le redémarrage va avoir lieu en mode dégradé.

On se propose dans cette partie de calculer le couple à fournir sur l'arbre moteur afin de pouvoir redémarrer dans cette position critique.

A.1 Détermination du couple résistant à fournir sur l'arbre moteur pour équilibrer la charge.

On se propose d'étudier **l'équilibre statique** d'une cabine (voir **DR A1**). Pour cela, on isole l'ensemble **S_0 = {cabine + charge maxi + chariot + galets de chariot + suspente}**.

On note :

$\vec{P}$: Le vecteur qui représente l'action de la pesanteur sur le système isolé. Il est exercé au point **G**.

$\vec{R}$: Le vecteur qui représente l'action des câbles **porteurs** sur le système isolé. Ce vecteur est considéré perpendiculaire à la direction des câbles. Il est exercé au point **E**.

$\vec{T}$: le vecteur représentant l'action du brin du câble tracteur sur le système isolé. Ce vecteur est parallèle au câble tracteur. Il est exercé au point **E**.

A.1.1. **Représenter** sur **DR A1** les supports de ces actions.

A.1.2. **Ecrire** l'équation vectorielle de la résultante.

$$\boxed{\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}}$$

A.1.3. **Ecrire** l'équation scalaire de la résultante en projection sur sur $\vec{X}$.

$$\boxed{\|\vec{T}\| - \|\vec{P}\| . \sin\theta = 0}$$

A.1.4. **Exprimer** le vecteur $\vec{T}$ en fonction de M_t, de M_c, de **g** et de l'angle θ.

$$\vec{T} = \|\vec{P}\| .\sin\theta . \vec{x} \qquad \vec{T} = [M_t + M_c].g.\sin\theta . \vec{x}$$

A.1.5. Sur le relevé topographique document **DR A2**, **tracer** le point **A**, lieu où la cabine amont (côté Pic du Midi) supporte la plus grande pente sur les câbles porteurs. **Mesurer** au point **A,** sur le document **DR A2** l'angle θ_{Pic}. **Noter** sa valeur en degré dans le rectangle ci-dessous.

$\Theta_{Pic} = 32$ (mesure effectuée par rapport à la trajectoire fond de cabine chargée)

A.1.6. Connaissant la position de la cabine amont (point **A**), **tracer** le point **B** position de la cabine aval (côté gare intermédiaire). **Mesurer** au point **B,** sur le document **DR A2** l'angle θ_{inter}. **Noter** sa valeur en degré dans le rectangle ci-dessous.

Θ_{inter} = 3° (ou –3° valeur acceptée)

A.1.7. On note $C_{\text{résistant / poulie}}$, le couple résistant à fournir sur la poulie motrice pour équilibrer la charge (les deux cabines chargées en A et B). A partir des 2 angles relevés, **déterminer** ce couple en fonction de **D_P**. **Effectuer** l'application numérique.

$T_{pic} = P \sin \theta_{pic}$; $T_{inter} = P \sin \theta_{inter}$

$P = 9.81 \times (3220 + 5215) = 82747.35$ N

$T_{pic} = 43849.4$ N ; $T_{inter} = 4330.7$ N

$$C_{\text{résistant / poulie}} = \left[T_{pic} + T_{inter}\right] \cdot \frac{D_P}{2} = [43849.4 + 4330.7] \times 1.325$$

$$C_{\text{résistant / poulie}} = 63838 \text{ N.m}$$

A.1.8. On définit pour le réducteur, le rapport de réduction $K_{10/4} = \frac{\Omega_{10/18}}{\Omega_{4/18}}$ avec $\Omega_{10/18}$ et $\Omega_{4/18}$ les vitesses angulaires respectives de l'arbre de sortie 10 et de l'arbre d'entrée 4 par rapport au carter fixe 18. A l'aide du dessin d'ensemble du réducteur et de sa nomenclature (document **DT A2** et **DT A3**), **déterminer** le rapport de réduction du réducteur.

Montrer que $K_{10/4} = \frac{12}{185}$. Pour la **suite du problème** on posera $\mathbf{K_{10/4} = \frac{\Omega_P}{\Omega} = \frac{12}{185}}$

$$K_{10/4} = \frac{Z_4 \cdot Z_{12}}{Z_{13} \cdot Z_{10}}$$

$$K_{10/4} = \frac{24 \cdot 14}{74 \cdot 70} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{12}{37 \cdot 5} = \frac{12}{185}$$

A.1.9. On note $C_{\text{résistant / mot}}$, le couple résistant à fournir sur l'arbre moteur pour équilibrer la charge**.** **Exprimer** ce couple. **Effectuer** l'application numérique.

$C_{\text{résitant/mot}} = C_{\text{résistant/poulie}} \times K_{10/4}$ (Le rendement de cette chaîne cinématique est supposé égal à 1)

$$C_{\text{résistant/mot}} = 63838 \cdot \frac{12}{185} = 4141 \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

A.2 Détermination du couple dynamique.

En mode dégradé, le cahier des charges fixe l'accélération des cabines à **a_{cabine} = 0,3 m.s^{-2}** .

A.2.1. Exprimer l'accélération angulaire correspondante sur l'arbre moteur notée $\dot{\Omega} = \dfrac{d\Omega}{dt}$ en fonction de a $_{cabine}$. **Calculer** cette accélération.

$V = \dfrac{D_P}{2} \cdot \Omega_P = \dfrac{D_P}{2} \cdot \Omega \cdot K_{10/4}$ En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient : $\dfrac{dv}{dt} = a_{cabine} = K_{10/4} \cdot \dfrac{DP}{2} \cdot \dfrac{d\Omega}{dt}$; donc $\dfrac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} = \dfrac{2 \cdot a_{cabine}}{D_P \cdot K_{10/4}}$

$\dot{\Omega} = \dfrac{0,3 \cdot 2 \cdot 185}{2,65 \cdot 12} = 3,49 \quad rad \cdot s^{-2}$

A.2.2. On rappelle les deux expressions de l'énergie cinétique : $E_C = \dfrac{1}{2} \cdot M \cdot V_s^{\ 2}$; $E_C = \dfrac{1}{2} \cdot J_Z \cdot \Omega_s^{\ 2}$

M : masse du solide en translation exprimée en kg.
V_s : vitesse de translation du solide exprimée en m.s^{-1} .
J_Z : inertie du solide en rotation autour de l'axe $\vec{Z}$ exprimée en kg.m^2 .
Ω_s : vitesse angulaire du solide en rotation autour de l'axe $\vec{Z}$ exprimée en rad.s^{-1} .

On considère l'ensemble **S_1 = { câble + cabines chargées }** de masse **m_S**.

Remarque : le câble est considéré comme une masse se déplaçant en translation à la vitesse V d'une cabine.

Exprimer l'énergie cinétique E_C de l'ensemble S_1 en fonction de m_s et de V.

$E_C = \dfrac{1}{2} \cdot m_s \cdot V^2 \quad$ avec $\quad m_s = \left[2 \cdot (M_t + M_c) + (2,65 \cdot 5520)\right]$

soit $\quad m_s = \left[2 \cdot (3220 + 5215) + (2,65 \cdot 5520)\right] = 31498\ kg$

A.2.3. Montrer que l'énergie cinétique précédente peut s'écrire sous la forme :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \left[K_{10/4} \cdot \Omega \cdot \frac{D_p}{2}\right]^2$$

$V = \dfrac{D_P}{2} \cdot \Omega_P \quad$ avec $\quad \Omega_P = \Omega \cdot K_{10/4} \quad$ donc $\quad V = \dfrac{D_P}{2} \cdot \Omega \cdot K_{10/4}$

donc $\quad E_C = \dfrac{1}{2} \cdot m_s \cdot \left[\dfrac{D_P}{2} \cdot \Omega \cdot K_{10/4}\right]^2$

A.2.4. Par conservation de l'énergie cinétique entre le système précédent et l'arbre moteur principal, on peut écrire la relation suivante : $\dfrac{1}{2} \cdot J_{S_1/mot} \cdot \Omega^2 = \dfrac{1}{2} \cdot m_s \cdot \left[\Omega \cdot K_{10/4} \cdot \dfrac{D_p}{2}\right]^2$.

$J_{S_1/mot}$ représente l'inertie du système S_1 ramenée à l'arbre moteur.

Exprimer $J_{S_1/mot}$, puis calculer sa valeur.

Par identification avec la relation de la question précédente, on peut écrire :

$$J_{S_1/mot} = m_S \cdot \left[K_{10/4} \cdot \frac{D_P}{2}\right]^2 \quad \text{avec} \quad m_s = \left[2 \cdot (M_t + M_c) + (2{,}65 \cdot 5520)\right]$$

après application numérique,

$$J_{S_1/mot} = \left[2 \cdot (3220 + 5215) + 2{,}65 \cdot 5520\right] \cdot \left[\frac{12}{185} \cdot \frac{2{,}65}{2}\right]^2$$

soit $J_{S_1/mot} = 232{,}7\ kg \cdot m^2$

A.2.5. A partir des données du document **DT A1**, **citer** les pièces qui sont prépondérantes en terme d'inertie et **noter** leur inertie ramenée à l'arbre moteur.
En tenant compte du résultat de la question précédente, **déterminer** l'inertie équivalente du système complet rapportée sur l'arbre moteur. On notera cette inertie J_T.

Désignation « Nom de la pièce : Nombre X Inertie de la pièce ramenée sur l'arbre moteur »
Arbre moteur : **1 x 9,54** ; Poulie de renvoi : **7 x 3,4** ; Poulie motrice : **1 x 22,6**
Galet : **58 x 0,2** ; Galet de chariot : **32 x 0,2**

$$J_T = 9{,}54 + (7 \cdot 3{,}4) + 22{,}6 + (58 \cdot 0{,}2) + (32 \cdot 0{,}2) + 232{,}7$$

soit $J_T = 306{,}64\ kg \cdot m^2$

A.2.6. **Exprimer** le couple dynamique C_{dyn} en fonction de J_T et de $\dot{\Omega}$. **Calculer** C_{dyn}.

$$C_{dyn} = J_T \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$ Le calcul donne $$C_{dyn} = 306{,}64 \cdot 3{,}49 = 1070{,}17\ N \cdot m$$

A.3 Détermination du couple moteur.

A.3.1. On considère la chaîne cinématique {réducteur et système poulies/câble}. **Déterminer** le rendement global de cette chaîne cinématique.

$$\eta_{global} = \eta_{red} \cdot \eta_{PC}$$ Le calcul donne $$\eta_{global} = 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855$$

A.3.2. **En déduire Cm,** le couple à fournir sur l'arbre moteur nécessaire au redémarrage dans cette situation critique. **Effectuer** l'application numérique.

$$C_m = \frac{\left[C_{résistant/mot} + C_{dyn}\right]}{\eta_{global}}$$ Le calcul donne

$$C_m = \frac{[4141 + 1070{,}17]}{0{,}855} = 6094{,}73\ N \cdot m$$

Le couple nécessaire à fournir sur l'arbre moteur lors du redémarrage dans cette situation critique est de **6095 N.m** .