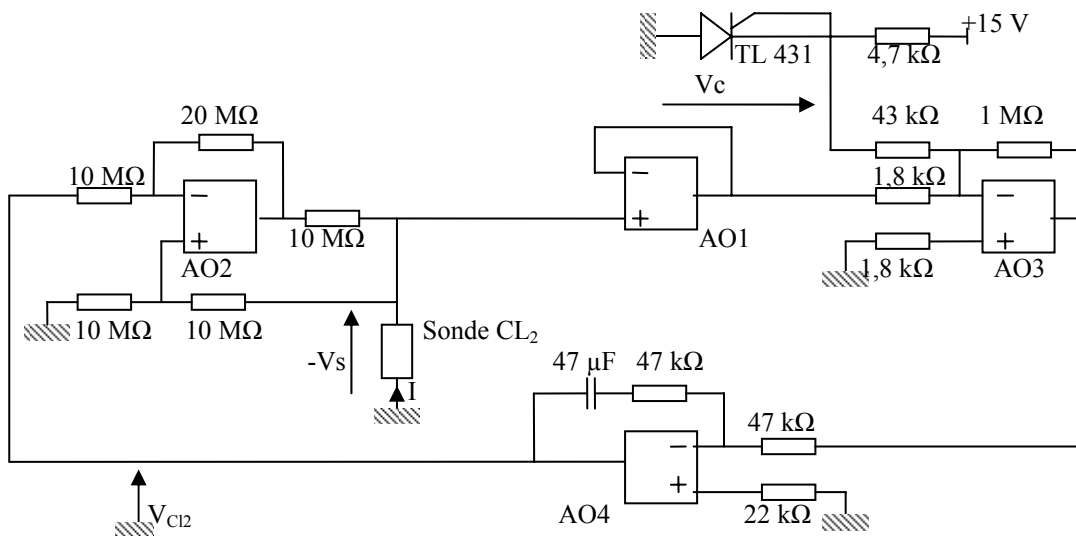


## Éléments de correction

### Traitement de l'eau d'une piscine par chloration

Le schéma d'exploitation de la sonde ampèremétrique est représenté à la figure 8.2



**Figure 8.2** Schéma d'exploitation de la sonde ampèremétrique

Les amplificateurs intégrés linéaires sont alimentés en tensions symétriques +/-15 V.

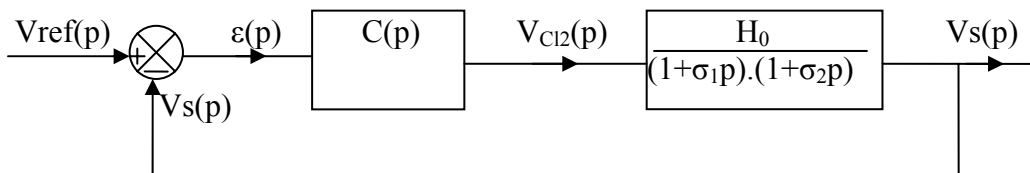
Le composant TL431 délivre une tension de référence  $V_c = 2,5$  Volts.

La sonde consomme un courant proportionnel à la concentration en chlore libre :  $I = 25 \text{ nA/mg/l}$ .

La sonde opère sous une tension voisine de  $V_{s0}$ .

On linéarise autour de ce point sa caractéristique électrique statique comme  $V_s = V_{s0} + k_{s0} \times i$ , en dynamique le comportement est du deuxième ordre et  $k_s(p) = V_s(p) / I(p) = k_{s0} / ((1 + \sigma_1 p) \times (1 + \sigma_2 p))$  avec  $k_{s0} = 10^6 \Omega$ ,  $\sigma_1 = 100 \text{ s}$  et  $\sigma_2 = 1 \text{ s}$ .

**Q8.1** Montrer que la structure qui alimente la sonde se comporte suivant le schéma bloc représenté à la figure 8.3



**Figure 8.3** Modèle de comportement de la sonde ampèremétrique

AO3 est un additionneur à un facteur d'échelle près des grandeurs  $V_c$  et  $V_s$ . Comme  $V_c$  et  $V_s$  sont de signe contraire, le signal qui sort de AO3 représente l'erreur du système.

AO4 est configuré en correcteur proportionnel et intégral.

AO2 est dans une structure générateur de courant qui pilote la sonde. Ils sont intégrés à la chaîne d'action.

En statique le correcteur « PI » assure une erreur nulle et  $V_{\text{ref}} = V_s = V_c \times \frac{1,8}{43} = 104 \text{ mV}$ .

La sonde travaille dans la zone III de sa caractéristique figure 8.1. C'est la condition qui permet de connaître la concentration en chlore dans le bassin. La tension  $V_{c12}$  est proportionnelle à cette concentration.

Sur le schéma d'exploitation de la sonde (figure 8.2), AO1, AO3 et AO4 réalisent la fonction :

$$V_{cl2(p)} = \left[ \left( V_{c(p)} \times \frac{10^3}{43} \right) + \left( -V_{s(p)} \times \frac{10^3}{1,8} \right) \right] \left[ \frac{1 + (47 \times 47 \times 10^{-3} \times p)}{47 \times 47 \times 10^{-3} \times p} \right]$$

AO2 est configuré en générateur de courant I commandé par la tension  $V_{cl2(p)}$  tel que

$$I = \frac{2 \times V_{cl2(p)}}{10^7} \quad \text{et} \quad V_{s(p)} = \left[ \frac{2 \times k_{s0} \times V_{cl2(p)}}{10^7} \right] \times \left[ \frac{1}{(1 + \sigma_1 p) \times (1 + \sigma_2 p)} \right].$$

**Q8.2** Déterminer  $C(p)$  et  $H_0$ . Effectuer les applications numériques des constantes de  $C(p)$ , pour  $H_0$  et  $V_{ref}$ .

$$C_{(p)} = \left( \frac{10^3}{1,8} \right) \times \left( \frac{1 + 47 \times 47 \times 10^{-3} \times p}{47 \times 47 \times 10^{-3} \times p} \right), \quad C_{(p)} = 251,5 \frac{1 + 2,209 p}{p}.$$

$$V_{ref} = 104 \text{ mV}.$$

$$H_{(p)} = H_0 = \frac{2 \times k_{s0}}{10^7} = 0,2 \Omega.$$

**Q8.3** Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte  $T_{bf0}(p) = V_s(p) / V_{ref}(p)$ .

$$T_{bf0}(p) = \frac{V_{s(p)}}{V_{ref}(p)} = C_{(p)} \times H_{(p)} = 50,3 \frac{1 + 2,209 p}{p \times (1 + p) \times (1 + 100 p)}$$

**Q8.4** Tracer les diagrammes de Bode du gain et de la phase de  $H_{bf0}(j\omega)$  sur le document réponse 1.

**Q8.5** Quelle est la marge de phase du système ? Conclure à propos du réglage de  $C(p)$ .

Le gain est nul pour  $\omega = 0.3 \text{ rd/s}$ . La phase pour cette pulsation atteint  $-161^\circ$ .

La marge de phase est donc de  $19^\circ$ . Ce réglage du correcteur donne une faible marge de stabilité.

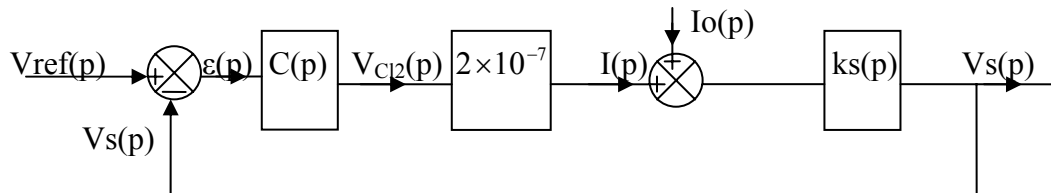
**Q8.6** Montrer que  $V_{Cl2} = k_{CL2} \times C_{CL2}$  et calculer  $C_{CL2}$ , la concentration de chlore libre en mg/l.

$$V_{cl2} = \frac{10^7 \times I}{2} = \left( \frac{10^7 \times 25 \times 10^{-9}}{2} \right) \times C_{cl2} = 0.125 \times C_{cl2} \quad \text{et} \quad C_{cl2} = 8 \times V_{cl2}.$$

**Q8.7** Quelle est la tension de polarisation de la sonde  $V_{s0}$  ?

$$V_{s0} = 104 \text{ mV}$$

**Q8.8** Vis-à-vis de la boucle étudiée, une variation de la concentration en chlore libre constitue une perturbation en courant  $I_0(p)$ . Construire un schéma bloc du système prenant en compte cette perturbation. La valeur statique  $V_{s0}$  de  $V_s$  est-elle sensible à cette perturbation ?



En statique la valeur de  $V_s$  est inchangée grâce au correcteur intégral.

**Q8.9** Quel est l'ordre de grandeur du temps de réponse du capteur ? Cette valeur convient-elle pour régler la chloration d'une piscine ?

Le temps de réponse du capteur est de l'ordre de grandeur de sa plus grande constante de temps soit 100 s. Celui-ci est acceptable car la concentration dans le bassin varie en quelques heures.

**Q8.10** La précision de la mesure de la concentration en chlore actif est de 2%. Donner l'ordre de grandeur des paramètres auxquels il faut particulièrement veiller lors du choix des amplificateurs intégrés linéaires A01, A02, A03, A04.

A01 doit avoir des courants de polarisation plus faibles que 1 nA pour ne pas fausser la mesure du courant dans la sonde. La tension de décalage d'offset à l'entrée doit être de l'ordre du millivolt.

A02 voit sur ses entrées des résistances de plus de 10 MΩ, ses courants de polarisation doivent être inférieurs à 1 nA.

A03 additionne des signaux de 100 mV, son décalage d'offset en entrée doit être pas dépasser un millivolt.

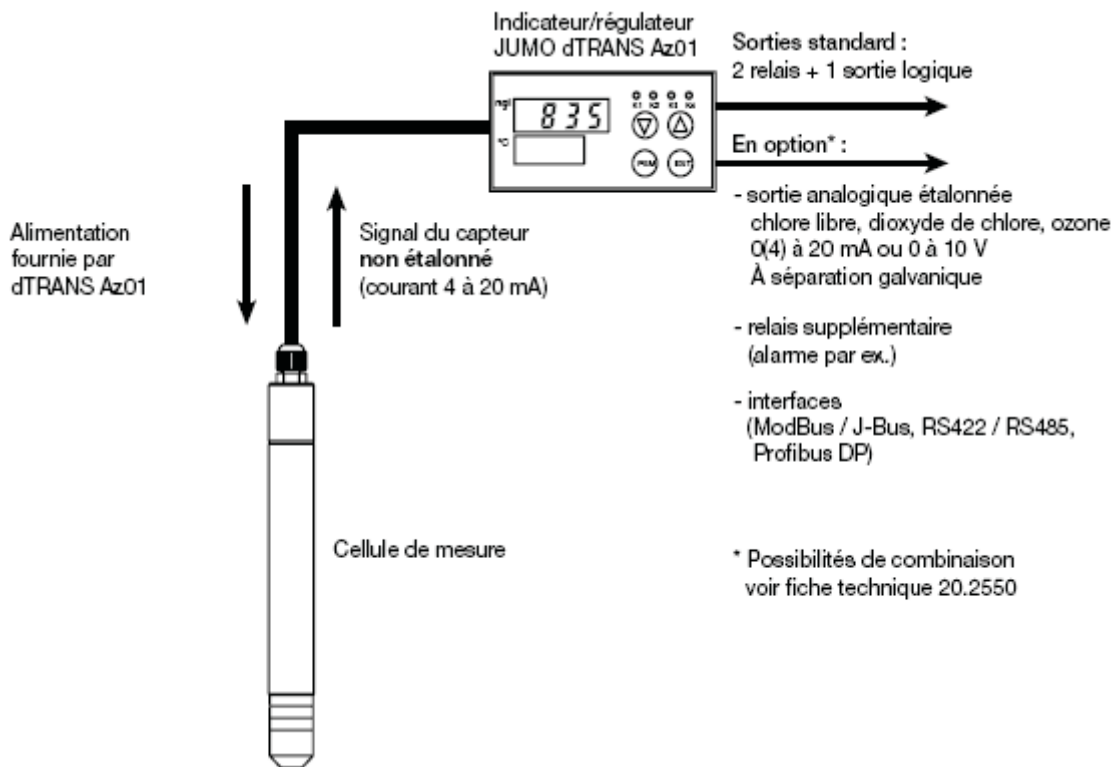
A04 peut être choisi parmi les amplificateurs d'usage général.

**9- Régulation de la concentration en chlore libre par régulateur industriel**

La sonde de mesure du chlore intègre l'interface électronique qui produit un signal 4/20 mA proportionnel à la teneur en chlore avec compensation en température.

Le régulateur dTRANS Az01 est destiné à piloter la pompe doseuse de chlore à débit proportionnel par une liaison 4/20 mA.

Ce régulateur est doté d'une correction de type PID.



**Figure 9.1** Interface électronique de la sonde de mesure

**Q9.1** L'entrée du régulateur numérise le signal capteur sur 15 bits. La résolution est-elle compatible avec la précision de 2% de la sonde ?

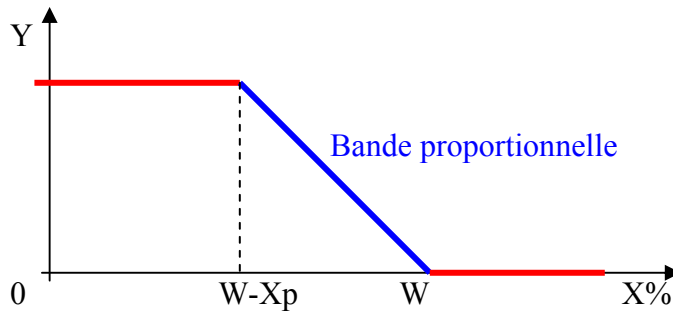
D'après les normes sanitaires des piscines, la concentration en chlore peut être comprise entre 0,3 et 1,4 milligrammes par litre. Si la pleine échelle en entrée correspond à la plage de mesure, la résolution est de  $\frac{1}{2^{15}-1} \times 1,4 = 4,3 \times 10^{-5}$  mg/l. Soit une erreur sur la plus faible valeur (0.3mg/l) de 1,43%, inférieure à la précision de la sonde.

**Q9.2** Définir la notion de bande proportionnelle.

Soient W la consigne, X la mesure et Y la commande du régulateur exprimées en % de la pleine échelle.

$$Y = \frac{W - X}{Xp} \times 100$$

La bande proportionnelle est le domaine de la caractéristique du régulateur où :



**Q9.3 Réglage des paramètres du correcteur PID.**

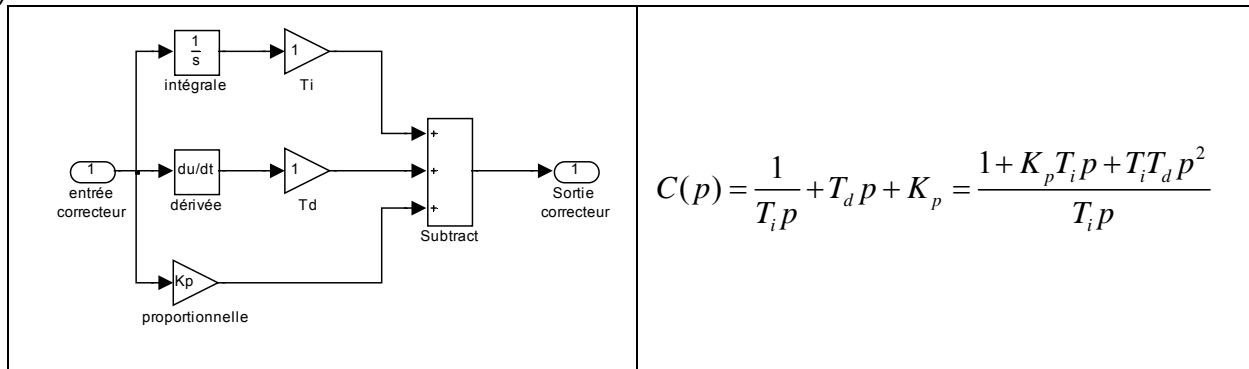
Sur le document réponse 2, indiquer pour chaque réponse du système asservi, le sens dans lequel il faudrait faire évoluer la valeur du paramètre considéré pour améliorer le comportement du système (correct, trop faible, trop fort).

Action proportionnelle  $P_b$  (largeur de la bande proportionnelle), (action intégrale  $T_i$  (constante de temps), action dérivée  $T_d$  (constante de temps).

Chaque essai demande 24 heures pour que l'eau retrouve un équilibre chimique. Il est donc très difficile de régler les correcteurs de manière intuitive. Une modélisation s'impose pour anticiper le réglage des paramètres.

**Q9.4 Cas où le système possède deux pôles dominants et un pôle de commande**

Lorsque le modèle de comportement d'un système possède deux pôles dominants, il est nécessaire de complexifier la structure du correcteur afin de compenser les deux pôles dominants, il faut prévoir un correcteur possédant deux zéros et une action intégrale pour maintenir une erreur en régime statique nulle. Cette structure, représentée à la figure 9.2, est appelée PID (action proportionnelle, intégrale dérivée) :



**Figure 9.2** Structure d'un correcteur P.I.D.

Une première stratégie consiste à synthétiser directement le correcteur à partir de la fonction en boucle ouverte et de la fonction désirée en boucle fermée. Par exemple en boucle ouverte :

$$H(p) = \frac{H_0}{(1+T_1p)(1+T_2p)} \text{ et en boucle fermée nous souhaitons un système du 1}^{\text{er}} \text{ ordre de gain unitaire}$$

$$Bf(p) = \frac{1}{1+T_c p}$$

Exprimer alors la fonction de transfert  $C(p)$  qui convient.

En boucle fermée, le système s'écrit :

$$Bf(p) = \frac{H(p) \times C(p)}{1 + H(p) \times C(p)}$$

$$\text{Soit le correcteur } C(p) = \frac{Bf(p)}{(1 - Bf(p)) \times H(p)}, \quad C(p) = \frac{1}{H_0 \times T_c \times p} + \frac{T_1 + T_2}{H_0 \times T_c} + \frac{T_1 \times T_2}{H_0 \times T_c} p$$

Cette méthode donne de bons résultats concernant la consigne mais les résultats sont médiocres concernant les perturbations. De plus ce type de correcteur ne peut être implanté sans limitation de sa bande passante, car l'action dérivée présente en régime harmonique une pente asymptotique de +20 dB/dec, il est par conséquent important de modifier la structure qui est représentée à la figure 9.3.

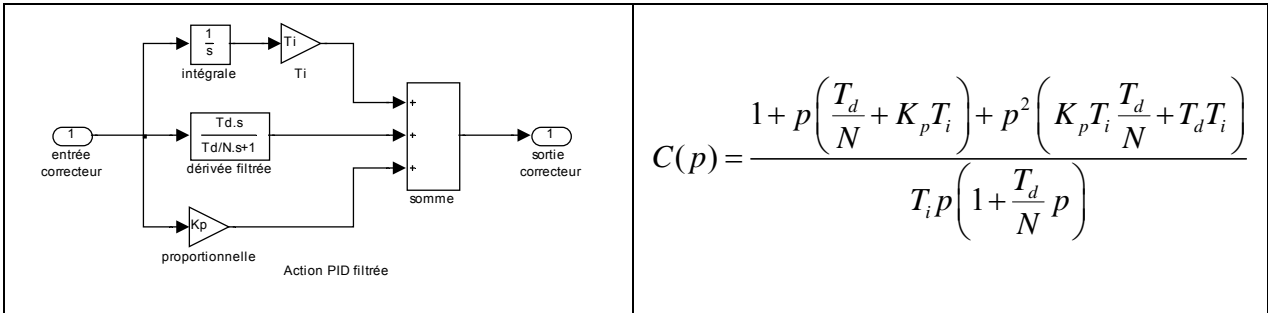


Figure 9.3 Structure d'un correcteur P.I.D. modifié

**Q9.5** Dans le cas du correcteur PID avec une action dérivée filtrée nous modifierons la structure pour que l'action dérivée et l'action proportionnelle n'interviennent que sur la mesure, nous insérerons un filtre de référence, ces modifications nous conduisent à la structure généralisée des correcteurs de type R.S.T. sur la figure 9.4. La synthèse de ce correcteur se fera par placement de pôles.

Par exemple nous prendrons un système du 2<sup>ème</sup> ordre identique à l'exemple précédent avec  $H_0 = 100$ ,  $T_1 = 5$  h,  $T_2 = 10$  h et en boucle fermée nous souhaitons un comportement fréquentiel identique à une fonction de Butterworth d'ordre 3 et un temps de montée en réponse indicielle  $T_m = 0,1$  h (voir exemple sur la figure 9.5).

Par identification avec une fonction de Butterworth du 3<sup>ème</sup> ordre :

$$Bf(p) = \frac{1}{1 + p\left(\frac{2}{\omega_0}\right) + p^2\left(\frac{2}{\omega_0^2}\right) + p^3\left(\frac{1}{\omega_0^3}\right)}$$

exprimer  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  pour  $\omega_0 T_m = 4$  et  $N = 10$ .

En boucle fermée :

$$Bf(p) = \frac{1}{1 + pT_i\left(\frac{1}{H_0} + Kp\right) + p^2T_i\left(\frac{T_1 + T_2}{H_0} + T_d\right) + p^3\left(\frac{T_iT_1T_2}{H_0}\right)}$$

Par identification nous avons trois termes à régler avec trois grandeurs de réglage :

$$T_i = \frac{H_0}{T_1T_2\omega_0^3} \quad T_d = \frac{2}{T_i\omega_0^2} - \frac{T_1 + T_2}{H_0} \quad Kp = \frac{2}{T_i\omega_0} + \frac{1}{H_0}$$

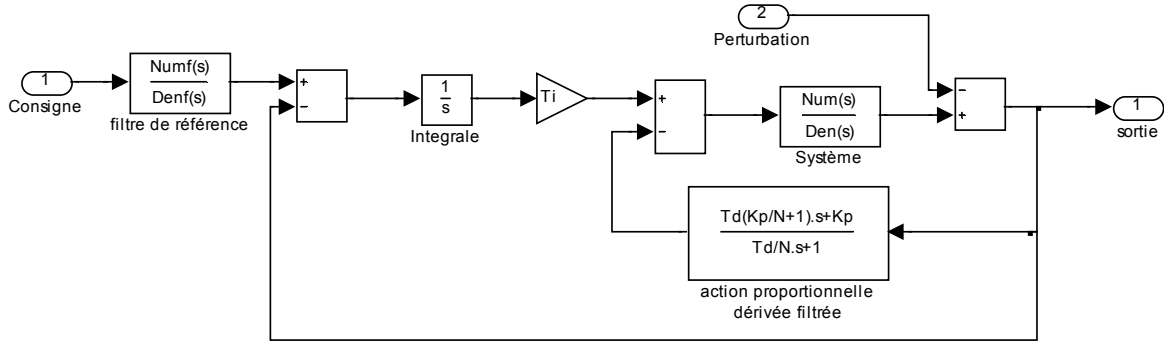
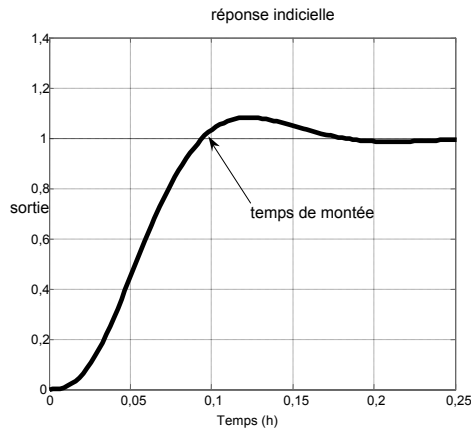


Figure 9.4 PID modifié et filtré



**Figure 9.5** Réponse indicielle

**Q9.6** Cas où le système possède un retard pur, mise en place d'un prédicteur de Smith

Dans le cas de la présence d'un retard pur dans la fonction de transfert en boucle ouverte, le correcteur PID n'est plus adapté sauf si le retard est faible devant les pôles dominants auquel cas, par une approximation au 1<sup>er</sup> ordre, nous revenons à l'existence d'un pôle de commande et aux méthodes de réglages exposées ci-dessus. Dans le cas d'un retard important, il est possible de « rejeter » ce retard à l'extérieur de la boucle par la mise en place d'un prédicteur de Smith (figure 9.6).

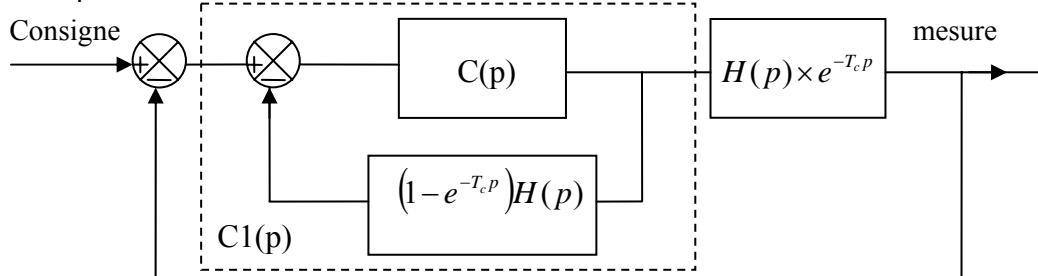
Le correcteur  $C(p)$  peut être de nature quelconque (P, PI, PID) et le modèle interne doit être :

$$\frac{x(p)}{u(p)} = (1 - e^{-T_c p}) H(p) \text{ où } H(p) \text{ est la fonction de transfert du système estimé sans retard.}$$

Dans ces conditions montrer que la fonction en boucle fermée s'écrit :

$$Bf(p) = e^{-T_c p} \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

Schéma bloc avec prédicteur de Smith :



$$C1(p) = \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p) - C(p)H(p)e^{-T_c p}}$$

En boucle fermée :

$$Bf(p) = \frac{C(p)H(p)e^{-T_c p}}{1 + C(p)H(p) - C(p)H(p)e^{-T_c p}} \times \frac{1}{1 + \frac{C(p)H(p)e^{-T_c p}}{1 + C(p)H(p) - C(p)H(p)e^{-T_c p}}}$$

Et comme attendu :  $Bf(p) = e^{-T_c p} \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$ .

Dans l'application de la figure 9.7, le correcteur est de type PI et le système est un 1<sup>er</sup> ordre :  $\tau = 1$  h, un gain statique  $H_0 = 100$  avec un retard pur  $T_c = 2$  h.

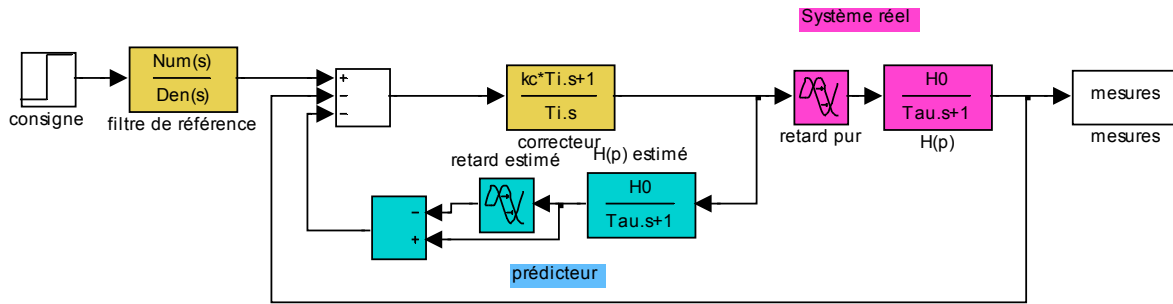


Figure 9.6 Prédicteur de Smith

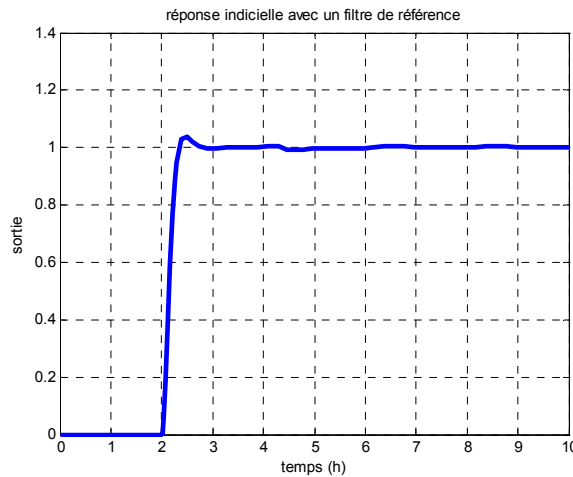


Figure 9.7 Réponse indicielle du système réglé par le correcteur de Smith

## 10- Modélisation des échanges chimiques dans le bassin

Pour les systèmes hydrauliques ou chimiques, les équations de bilan tenant compte des flux d'entrée et de sortie associés à la conservation des grandeurs semblent bien adaptées.

On peut faire ce bilan sur un instant  $dt$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de X} \\ \text{dans le système} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flux entrant} \\ \text{de X} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{flux sortant} \\ \text{de X} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de X} \\ \text{généré par le système} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de X} \\ \text{consommé par le système} \end{array} \right\}$$

Pour illustrer ce bilan, nous proposons d'écrire les équations du système représenté par la piscine dans laquelle la concentration et le volume du chlore sont contrôlés (figure 7.1).

Pour écrire les équations de bilan, nous ferons un certain nombre d'hypothèses, le mélange du flux chloré d'entrée est instantané, le fluide de sortie s'écoule avec un débit constant (indépendant de la hauteur d'eau mais qui dépend de l'encrassement du filtre  $f$ .  $F_s = k(1 - f)$ ).

Compte tenu des hypothèses, pendant un instant  $dt$ , le système ne génère rien ni ne consomme, les variations du volume sont uniquement liées aux flux,  $F_1$  le flux HCL et  $F_2$  le flux CL2 ( $F_1$  le flux d'acide chlorhydrique et  $F_2$  le flux d'eau de Javel).

$$S.dh = F_1.dt + F_2.dt - F_s.dt \quad (10.1)$$

**Q10.1** À quoi correspond la surface  $S$  ?

C'est la surface du bassin en vue de dessus.

L'apport en produit dissous pendant un instant  $dt$ , par le flux chloré d'entrée  $i$  s'écrit :  $F_i.C_i.dt$

Dans ces conditions le bilan relatif aux concentrations pendant un instant  $dt$  s'écrit :

$$d(C.h.S) = F_1.C_1.dt + F_2.C_2.dt - F_s.C_s.dt \quad (10.2)$$

**Q10.2** Quelle est l'unité utilisée pour chiffrer la concentration d'un liquide ? À quelle grandeur physique correspondent les termes de l'équation (10.2) ?

Les flux sont des débits de liquides qui s'expriment en m<sup>3</sup>/s et les concentrations en kg/m<sup>3</sup>. Dans le cas de la piscine, le flux sortant  $F_s$  dépend du débit de la pompe  $F_p$  que l'on suppose constant (indépendant de la hauteur d'eau) et dépendant seulement de l'encrassement des filtres, mais également du flux  $F_s$  lié au débordement au-delà de la hauteur d'eau initiale  $H_{max}$ . Dans ce cas, on suppose que le débit sortant peut être assimilable à la loi de Bernoulli :  $F_s = k \cdot \sqrt{h}$ .

Les équations (10.1) et (10.2) traduisent le comportement du système, bien entendu ces deux équations sont non linéaires puisque nous avons des produits des grandeurs  $h$  et  $C$  qui dépendent du temps. Pour élaborer une loi de commande, il faudra simplifier ce modèle de connaissance pour aboutir à un modèle simplifié de comportement par « linéarisation ».

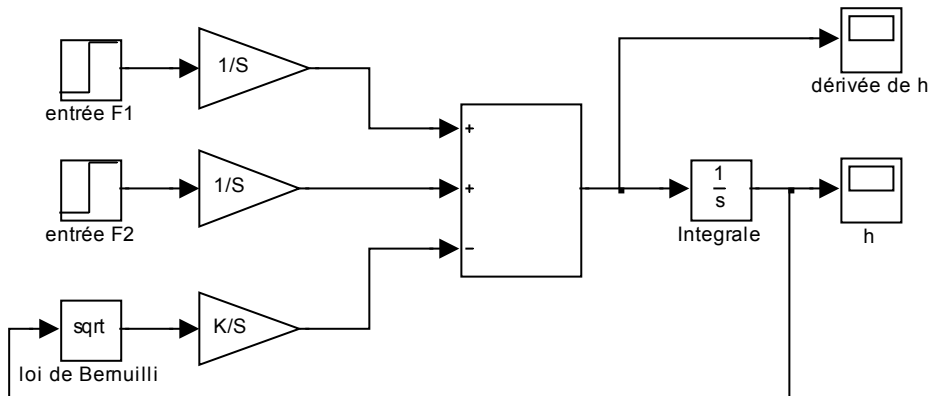
La relation entre le pH et le chlore libre est donnée par une relation graphique où le gain peut être obtenu par la mesure de la production de HOCL sur la courbe au voisinage du point de fonctionnement (pH = 7,2), soit 75% (voir figure 6.1).

Modèle de comportement de l'échangeur acide chlorhydrique / eau de Javel / piscine :

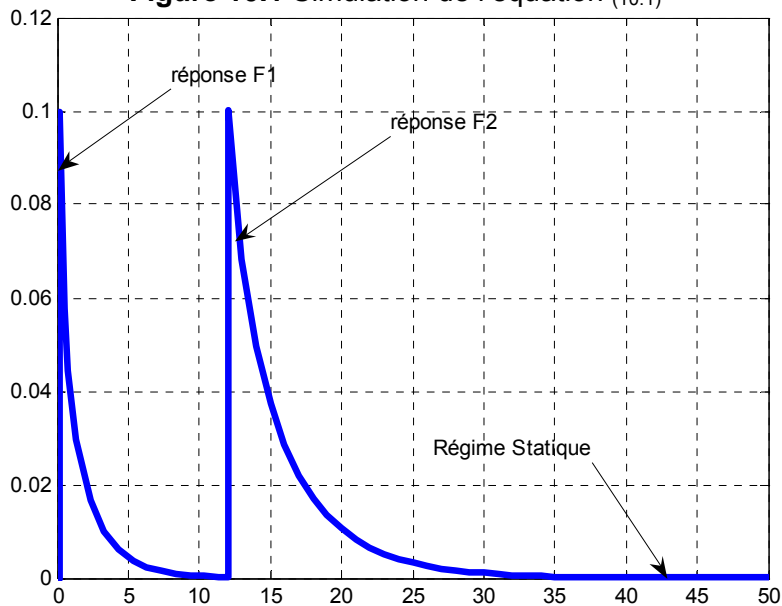
**Q10.3** On pose  $\frac{dh}{dt} = f(F_1, F_2, h)$ , on utilise le développement de Taylor suivant :

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{dh}{dt}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial F_1}\right)_0 \cdot F_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial F_2}\right)_0 \cdot F_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_0 \cdot h \quad (10.3)$$

Dans l'équation (10.3) l'indice 0 représente le point de fonctionnement (régime statique)



**Figure 10.1** Simulation de l'équation (10.1)



**Figure 10.2** Résultats de la simulation de l'équation (10.1)

On remarque sur les résultats de simulation donnés à la figure 10.2 que  $\left(\frac{dh}{dt}\right)_0 = 0$  en régime permanent donc :

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_0 = 0 \text{ soit } (F_1 + F_2)_0 = k \cdot \sqrt{h_0} \quad (10.4)$$

En appliquant la relation (10.3) à l'équation (10.1) montrer que nous obtenons :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} \cdot F_1 + \frac{1}{S} \cdot F_2 - \frac{(F_1 + F_2)_0}{2 \cdot S \cdot h_0} \cdot h \quad (10.5)$$

Depuis l'équation (10.1) :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_1}{S} + \frac{F_2}{S} - \left( \frac{k}{S} \times \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \right) \times h \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{F_1}{S} + \frac{F_2}{S} - \frac{(F_1 + F_2)_0}{2 \times S \times h_0} \times h.$$

**Q10.4** Que représente le terme  $\frac{2 \cdot S \cdot h_0}{(F_1 + F_2)_0}$  dans l'équation (10.5) par rapport à la constante de temps du système ?

Cette quantité est homogène à un temps. Il s'agit de la constante de temps du système.

$$\text{On posera pour la suite des calculs : } \tau = \frac{2 \cdot S \cdot h_0}{(F_1 + F_2)_0}$$

Pour le développement limité de l'équation (10.2), nous constatons pour les mêmes raisons que précédemment :  $(F_1 \cdot C_1 + F_2 \cdot C_2)_0 = k \cdot \sqrt{h_0} \cdot C_s$ . soit  $C_s = \frac{(F_1 \cdot C_1 + F_2 \cdot C_2)_0}{(F_1 + F_2)_0}$

Dans l'équation (10.2) nous avons 4 variables :  $\frac{d(C_s \cdot h \cdot S)}{dt} = g(F_1, F_2, h, C_s)$

$$\text{Soit } S \cdot \frac{d(C_s \cdot h_0 + C_{s0} \cdot h)}{dt} = \left( \frac{\partial g}{\partial F_1} \right)_0 F_1 + \left( \frac{\partial g}{\partial F_2} \right)_0 F_2 + \left( \frac{\partial g}{\partial h} \right)_0 h + \left( \frac{\partial g}{\partial C_s} \right)_0 C_s \quad (10.6)$$

**Q10.5** Vérifier qu'en remplaçant les dérivées partielles dans (10.6) et l'équation (10.4) nous trouvons l'expression « linéarisée » :

$$\frac{dC_s}{dt} = \frac{C_1 - C_{s0}}{S \cdot h_0} \cdot F_1 + \frac{C_2 - C_{s0}}{S \cdot h_0} \cdot F_2 - \frac{1}{\tau} \cdot C_s \quad (10.7)$$

A partir de la relation (10.6) :

$$\left( h_0 \times \frac{dC_s}{dt} \right) + \left( C_{s0} \times \frac{dh}{dt} \right) = \left( \frac{C_1 \times F_1}{S} \right) + \left( \frac{C_2 \times F_2}{S} \right) - \left( \frac{C_{s0} \times k \times h}{S \times 2 \times \sqrt{h_0}} \right) - \left( \frac{k \times \sqrt{h_0} \times C_s}{S} \right)$$

Grâce à la propriété (10.5) :

$$\frac{dC_s}{dt} = \left( \frac{C_1 - C_{s0}}{S \times h_0} \right) F_1 + \left( \frac{C_2 - C_{s0}}{S \times h_0} \right) F_2 - \frac{2}{\tau} C_s$$

Amélioration du modèle de connaissance : le système est un système à constante répartie qui introduit un retard et une non linéarité sur la concentration. Les relations entre la concentration, le temps et la position dans le bassin sont données par la relation suivante :

$$\frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-D \cdot \vec{\nabla}(c)) = 0 \quad (10.8)$$

Où  $c(t, x, y, z)$  représente la concentration dans le bassin,  $\vec{\nabla}(c)$  est un opérateur :

$$\bar{\nabla}(c) = \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial y} \bar{y} + \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} \bar{z} \text{ et } \bar{\nabla} \cdot \bar{F}(x, y, z) \text{ est la divergence du vecteur } \bar{F}(x, y, z),$$

D est le coefficient de diffusion. Pour des raisons de symétrie et de simplification, le système peut se limiter à une étude sur un domaine limité à une dimension (la longueur du bassin). On suppose que la concentration ne dépend pas de la profondeur (profondeur constante) et est également uniforme sur la largeur du bassin.

Dans ces conditions, l'équation générale (10.8) peut se réduire à l'équation (10.9) :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} - D \times \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = 0_{(10.9)}$$

La résolution de cette équation peut se faire numériquement, il suffit de considérer que la concentration  $c(t, x)$  est constante sur un espace  $dx = \Delta l = \frac{L}{n}$  en « découpant » la longueur du bassin en n tronçons.

**Q10.6** Montrer dans ces conditions que :

$$\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c(x + 2.\Delta l, t) - 2.c(x + \Delta l, t) + c(x, t)}{(\Delta l)^2}$$

Avec  $\Delta l$  infiniment petit :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = \frac{c(x + \Delta l, t) - c(x, t)}{\Delta l}$$

$$\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c(x + 2.\Delta l, t) - c(x + \Delta l, t) - c(x + \Delta l, t) + c(x, t)}{(\Delta l)^2}$$

$$\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c(x + 2.\Delta l, t) - 2.c(x + \Delta l, t) + c(x, t)}{(\Delta l)^2}$$

En posant  $c(k.\Delta l, t) = c_k(t)$  et les conditions aux limites  $c_0(t) = U(t) \times (U(t))$  est la fonction « échelon » et  $c_n(t) = 0$ .

**Q10.7** Montrer que l'équation (10.9) peut s'écrire sous forme d'un système d'équation d'état :

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \frac{D}{(\Delta l)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{X}(t) + \frac{D}{(\Delta l)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{U}(t)$$

$$c_n(t) = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \bar{X}(t)$$

À partir de la relation 10.9 :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \frac{D}{\Delta l^2} [c(x + 2.\Delta l, t) - 2.c(x + \Delta l, t) + c(x, t)]$$

Pour chaque tronçon :

$$\frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = \frac{D}{\Delta l^2} [c_2(t) - 2.c_1(t) + c_0(t)]$$

$$\frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = \frac{D}{\Delta l^2} [c_3(t) - 2.c_2(t) + c_1(t)]$$

$$\frac{\partial c_{n-1}(t)}{\partial t} = \frac{D}{\Delta l^2} [-2.c_n(t) + c_{n-1}(t)]$$

D'où l'équation d'état :

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \frac{D}{(\Delta l)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}(t) + \frac{D}{(\Delta l)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{U}(t)$$

$$c_n(t) = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \vec{X}(t)$$

Dans le cas où la condition initiale  $c_n(0)$  n'est pas nulle comment peut-on modéliser le système ?

La condition initiale détermine le vecteur colonne du dernier terme l'expression de  $\frac{d\vec{X}(t)}{dt}$  ci-dessus.

D'autre part l'absorption du chlore se fait en surface au contact de l'air et dépend de la concentration. La simulation du modèle ainsi établi est donnée par les courbes suivantes :

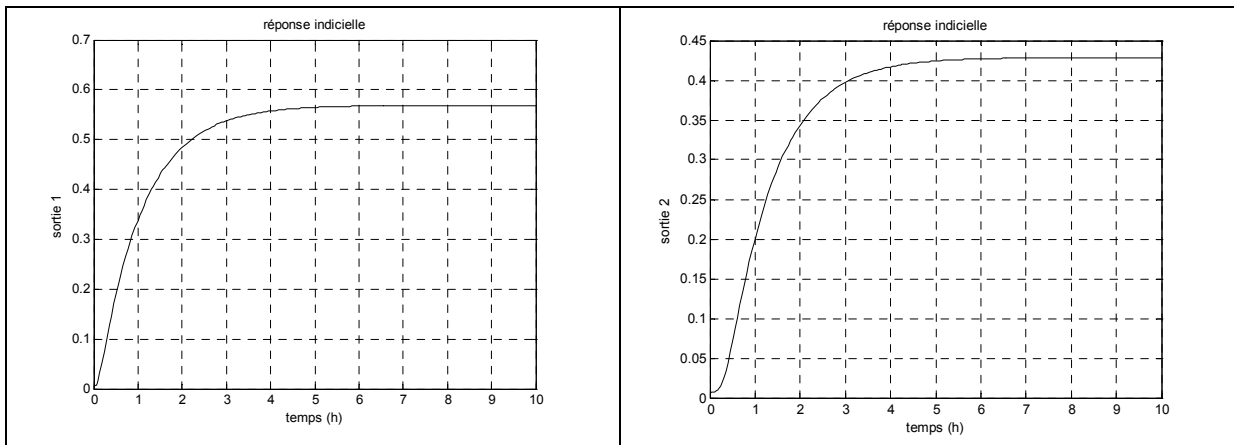


Figure 10.3 Simulation de la diffusion du chlore dans la piscine

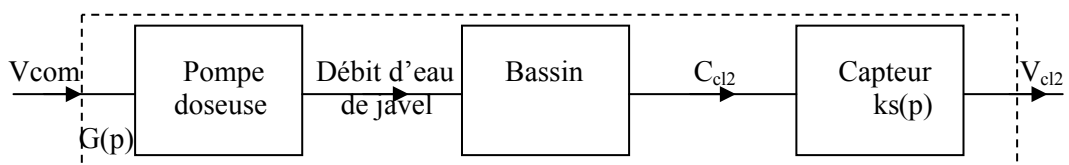
**Q10.8** Sur la figure 10.3, la courbe « sortie 1 » donne la concentration au milieu du bassin et la courbe « sortie 2 » donne la concentration au bout du bassin, expliquer les différences notables entre ces deux courbes.

La concentration décroît le long du bassin et le retard pur augmente d'autant plus que la mesure est éloignée du point d'injection de chlore.

On considère que la mesure de la concentration se fait sur le bout du bassin, on peut établir un modèle de comportement en identifiant le système par la méthode de Strejc.

### 11- Identification de la fonction de transfert de la piscine

**Q11.1** L'enregistrement donné à la figure 11.1 rapporte la réponse du bassin à un échelon d'injection de chlore. Faire un schéma bloc montrant les différents actionneurs et capteur qui interviennent dans ce test.



**Q11.2** Compte tenu des valeurs des constantes de temps caractéristiques de l'essai, le temps de réponse de la sonde intervient-il ? En déduire la fonction de transfert de la sonde  $ks(p) = V_{CL2}(p) / C_{CL2}(p)$ .

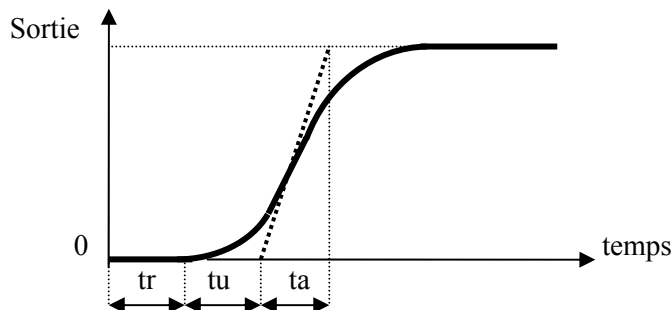
La question Q8 envisageait un temps de réponse de la sonde de l'ordre de 100 s. Ce retard correspond à un défilement du papier de 0,5 mm, donc négligeable. La fonction de transfert de la sonde est donc une constante. Avec la sonde de mesure associée au régulateur, la sortie analogique étalonnée en chlore libre délivre une tension 0/10 V. Si la pleine échelle correspond à 10 mg/l,  $k_s = 1 \text{ V/mg/l}$ .

**Q11.3** Identifier le comportement du processus à une fonction approchée par la méthode de Strejc. Celle-ci permet d'obtenir un modèle approché d'un système qui présente un retard et ne comporte qu'un seul point d'inflexion. La fonction de transfert approchée est la suivante :  $G = K_0 \cdot e^{-\sigma p} / (1 + T \cdot p)^n$

Les paramètres  $K_0$ ,  $n$ ,  $\sigma$  et  $T$  sont à déterminer à partir de la réponse à un échelon (voir figure 11.2) On détermine  $K_0$  par le rapport entre la valeur statique de la sortie après l'échelon et l'amplitude de l'échelon en entrée.  $T$  et  $n$  sont tirés du tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
tu/ta	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
ta/T	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699

Si on obtient une valeur exacte de  $n$  alors  $\sigma = tr$ . Sinon on prend la valeur de  $n$  immédiatement inférieure.



**Figure 11.2**

Appliquer la méthode à l'enregistrement de la réponse à un échelon représenté à la figure 11.1. Faire apparaître la construction sur le document réponse 3.

Sur le tracé nous relevons  $tr = 5000 \text{ s}$ ,  $tu = 4000 \text{ s}$  et  $ta = 9000 \text{ s}$ .

Par suite  $\frac{tu}{ta} = 0,44$  et  $n = 5$ ,  $T = \frac{ta}{5,119} \approx 2000 \text{ s}$

et la fonction de transfert approchée :  $G(p) = \frac{K_0 e^{-5000p}}{(1 + 2000p)^5}$

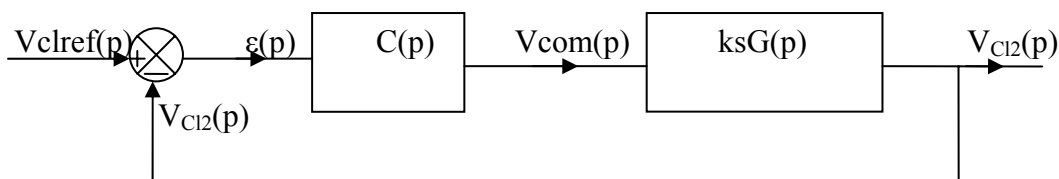
où  $K_0 = \frac{C_{cl2}}{\Delta V_{com}} = \frac{(1,4 - 1,25)}{10} = 0,015 \text{ (mg/l) / V}$

**Q11.4** Tracer les diagrammes de Bode du gain et de la phase de  $G(j\omega)$  sur le document réponse 4.

**Q11.5** On place un correcteur  $C(p) = kc(1 + Tip) / Tip$ . Quelle est la nature de ce correcteur ?

C'est un correcteur proportionnel et intégral.

**Q11.6** Faire le schéma bloc à retour unitaire du système.



**Q11.7** Tracer les diagrammes de Bode de  $C(j\omega) \times G(j\omega)$  sur le document réponse 5.

Fonction de transfert en boucle ouverte :  $C(p)ksG(p) = kcks \frac{1 + Tip}{Tip} \times \frac{K_0 e^{-5000p}}{(1 + 2000p)^5}$

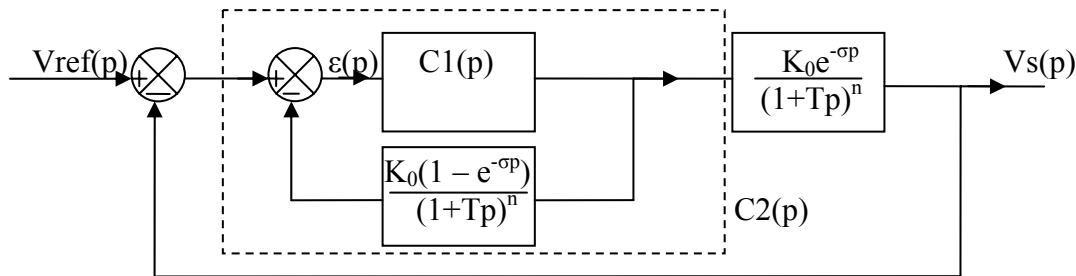
Avec par exemple  $T = T_i = 2000$  s  $C(p)k_sG(p) = \frac{k_c k_s K_0 e^{-5000p}}{2000 p (1 + 2000 p)^4}$

**Q11.8** Proposer une valeur de réglage du correcteur pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ .

Avec  $T_i = T = 2000$  s et  $k_s = 1$ , sur le document réponse 5 nous obtenons une marge de phase de  $45^\circ$  à la

$$\text{pulsation } 6 \times 10^{-5} \text{ rd/s en réglant } k_c = \frac{2000 \times 6 \times 10^{-5} \left\{ 1 + (2000 \times 6 \times 10^{-5})^2 \right\}^2}{0,015} \text{ soit } k_c = 8,2.$$

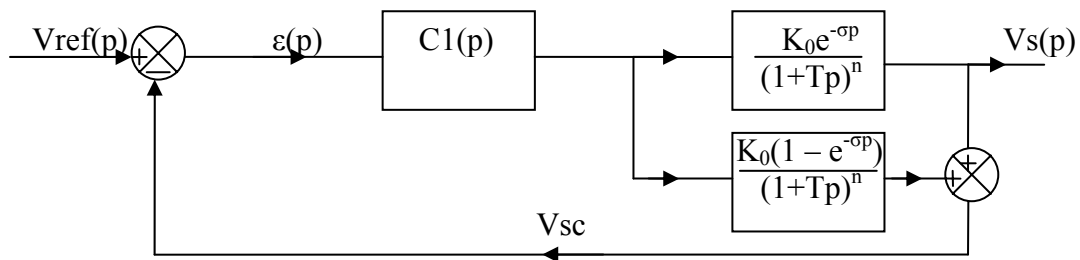
**Q11.9** Un prédictiveur de Smith est associé au correcteur précédent.



**Figure 11.3** Prédicteur de Smith

Dans le schéma représenté à la figure 11.2,  $C1(p) = K_p(1 + 1 / T_p)$ .

Déduire du schéma bloc de la figure 11.3 celui de la figure 11.4



**Figure 11.4** Prédicteur de Smith

Pour les deux schémas la chaîne d'action est la même. L'erreur qui la commande est  $\varepsilon(p)$ .

$$\text{Dans les deux dispositions } \varepsilon(p) = V_{ref}(p) - V_s(p) - \varepsilon(p) \left( C1(p) K_0 \frac{1 - e^{-\sigma p}}{(1 + Tp)^n} \right).$$

Ces deux schémas sont donc équivalents.

**Q11.10** Montrer que le signal de retour  $V_{sc}$  se fait sans retard.

$$V_{sc}(p) = (V_{ref}(p) - V_{sc}(p)) \left[ \frac{K_0 e^{-\sigma p}}{(1 + Tp)^n} + \frac{K_0 (1 - e^{-\sigma p})}{(1 + Tp)^n} \right] C1(p)$$

$$V_{sc}(p) = (V_{ref}(p) - V_{sc}(p)) \frac{C1(p) K_0}{(1 + Tp)^n}. \text{ Le retard est rejeté.}$$

**Q11.11** Quand les filtres du système de filtration de la piscine sont encrassés le débit peut baisser de 30%. Quel paramètre du processus est alors modifié ? La stabilité de la régulation reste-elle satisfaisante ? Conclure à propos de la validité des réglages des correcteurs.

Si les filtres font baisser le débit de 30%, le retard augmente de 30%. La stabilité se dégrade. Il faudrait que le correcteur s'adapte !

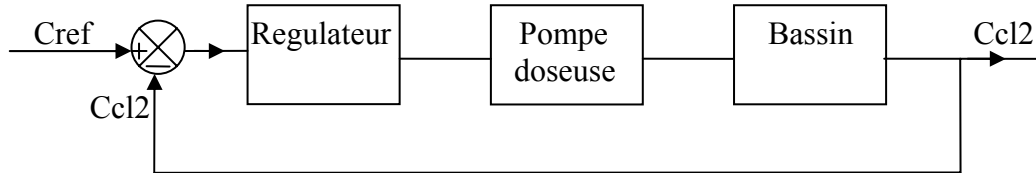
**Q11.12** Rappeler la notion de robustesse.

La robustesse d'un système asservi est sa faculté à rester stable malgré la dérive des paramètres qui le caractérisent.

## 12- Modélisation de la régulation du chlore actif dans la piscine

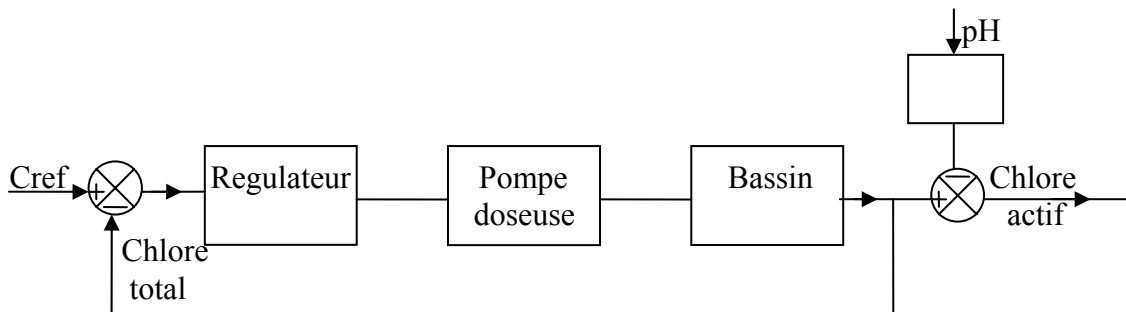
On suppose que la régulation du pH est parfaite et de consigne 7,3. La consigne de chlore actif (HClO) est fixée à 1 mg/l.

**Q12.1** Faire le schéma bloc de la régulation du chlore actif fondée sur le processus étudiée au paragraphe précédent.



**Q12.2** Si le pH varie, il constitue une perturbation pour la régulation du chlore actif. Faire apparaître cette perturbation dans le schéma fonctionnel.

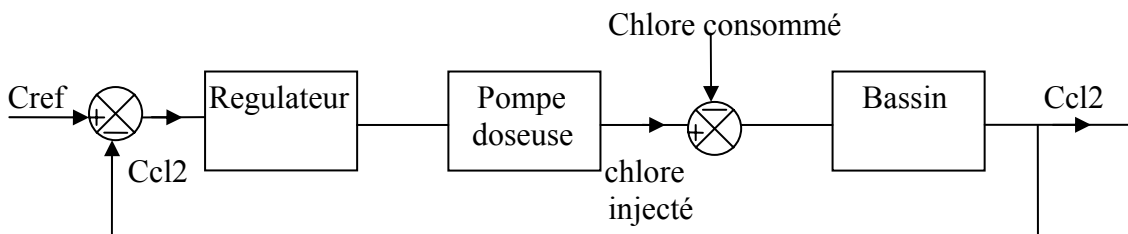
La sonde mesure le chlore total. Pour asservir le chlore actif il faut prévoir un calcul qui tienne compte du pH.



**Q12.3** La régulation du pH dispose d'une correction intégrale. Mais le capteur dérive de 0,1 pH par mois, cette dérive est corrigée lors de l'opération de maintenance mensuelle. Quelle est l'incidence de cette erreur de pH sur la concentration du chlore actif (HClO) ?

Si le pH dérive de 0,1 unité autour de la valeur 7,2, la proportion de chlore actif HOCl varie de 10%.

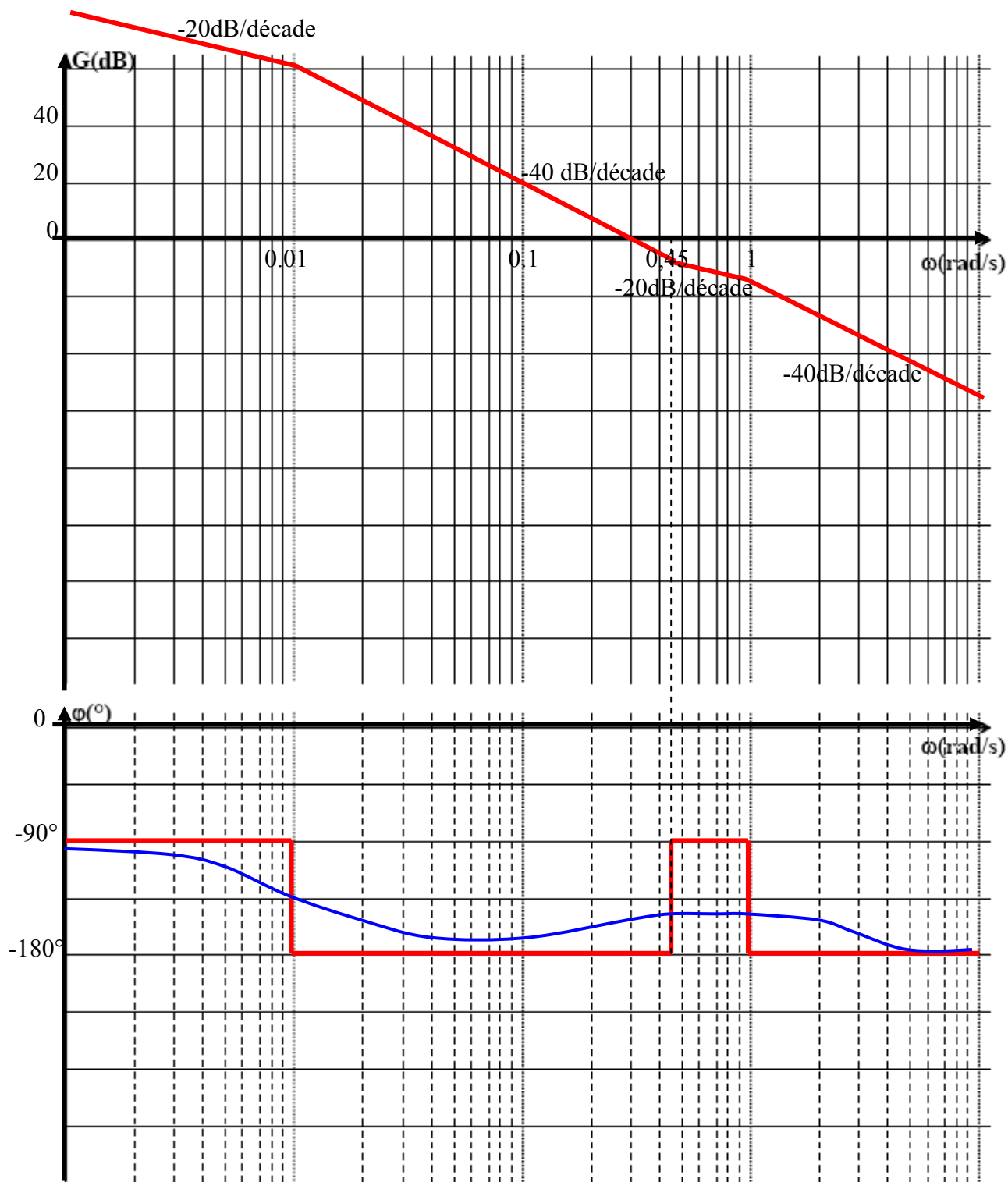
**Q12.4** Chaque baigneur introduit des polluants dans le bassin. La désinfection consomme en moyenne 10 g/heure de chlore actif par baigneur. La fréquentation moyenne du bassin étudié est de 50 baigneurs. Introduire cette perturbation dans le schéma fonctionnel.



**Q12.5** L'eau de javel utilisée présente une concentration qui peut évoluer de 10% selon l'approvisionnement. La robustesse de la régulation est-elle affectée par ces variations ?

Si l'eau de javel s'appauvrit de 10% en chlore, l'amplification de la pompe doseuse varie de 10%. Le gain statique de la chaîne d'action est affecté. L'action intégrale compensera cette dérive vis à vis de l'erreur statique.

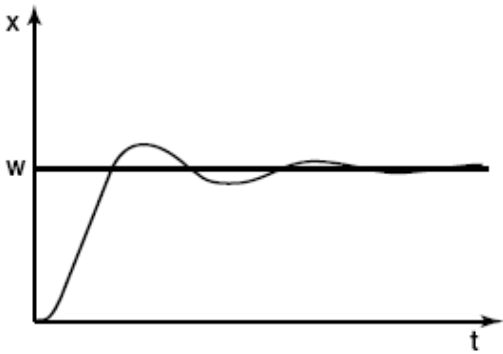
# Document réponse 1 (question 8.4)



## Document réponse 2 (question 9.3)

### Réglages du PID

Sur les tracés suivants,  $x$  est la teneur en  $C_{CL2}$  du bassin,  $W$  est la consigne de  $C_{CL2}$ .

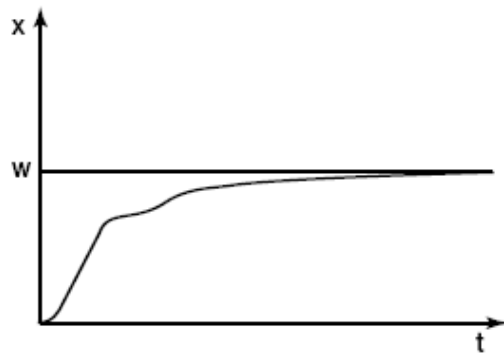


#### Réponse 1

P ? : Bon .....

Ti ? : Trop faible .....

Td ? : Trop faible .....

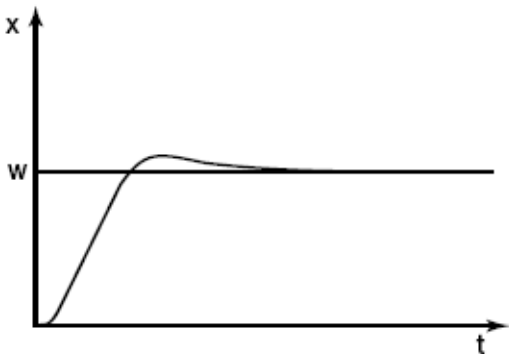


#### Réponse 2

P ? : Bon .....

Ti ? : Trop fort .....

Td ? : Trop fort .....

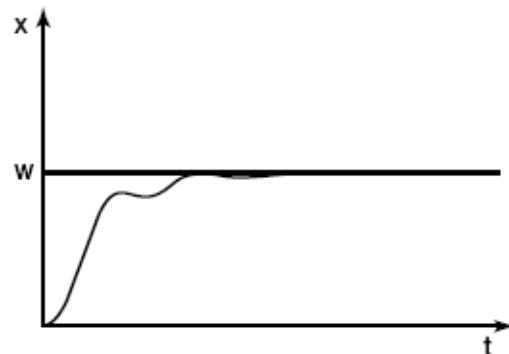


#### Réponse 3

P ? : Trop faible .....

Ti ? : Bon .....

Td ? : Bon .....



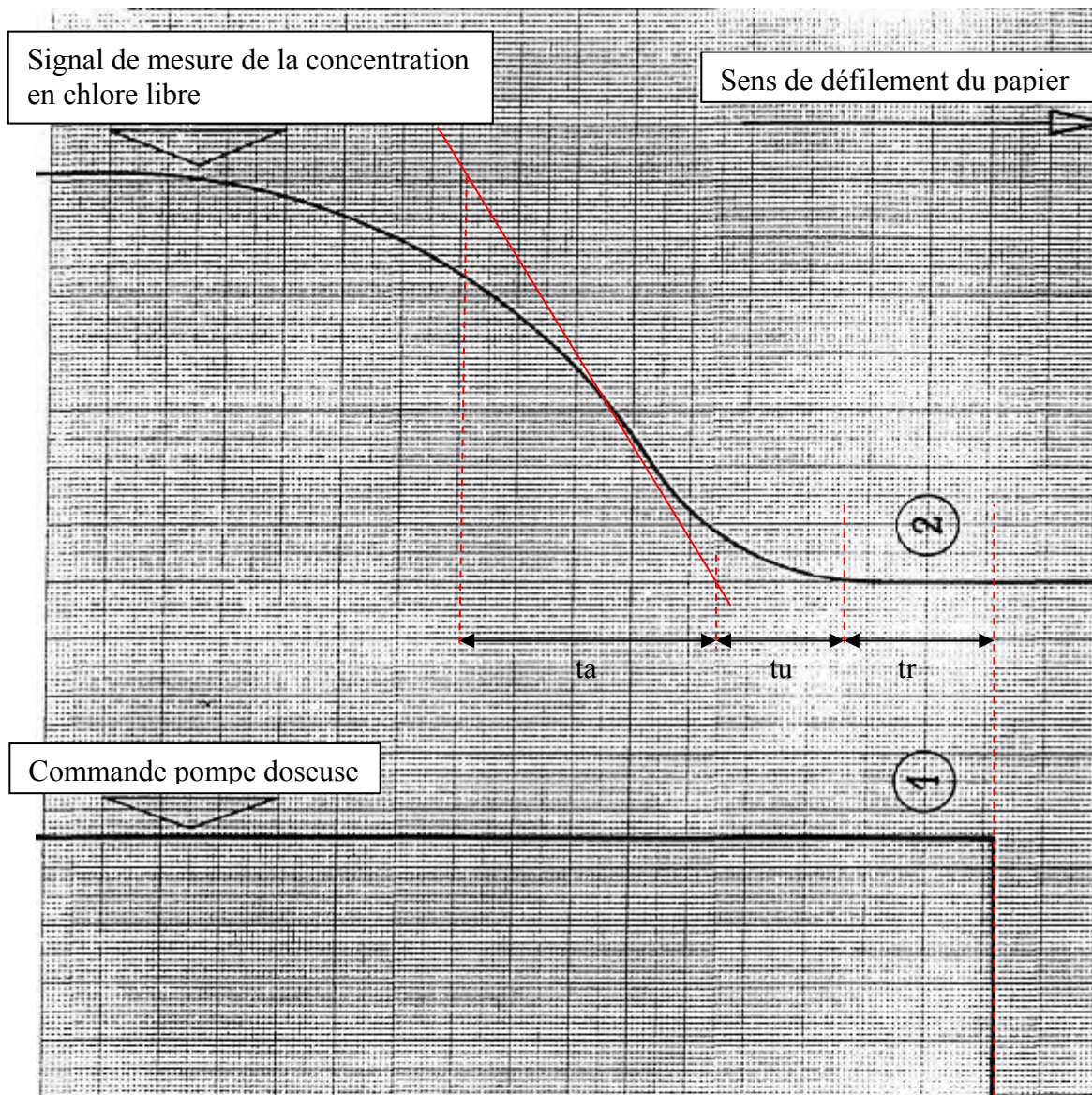
#### Réponse 4

P ? : Trop fort .....

Ti ? : Bon .....

Td ? : Bon .....

### Document réponse 3 (question 11.3)



Le papier de l'enregistreur défile à vitesse constante, 200 secondes par millimètre.

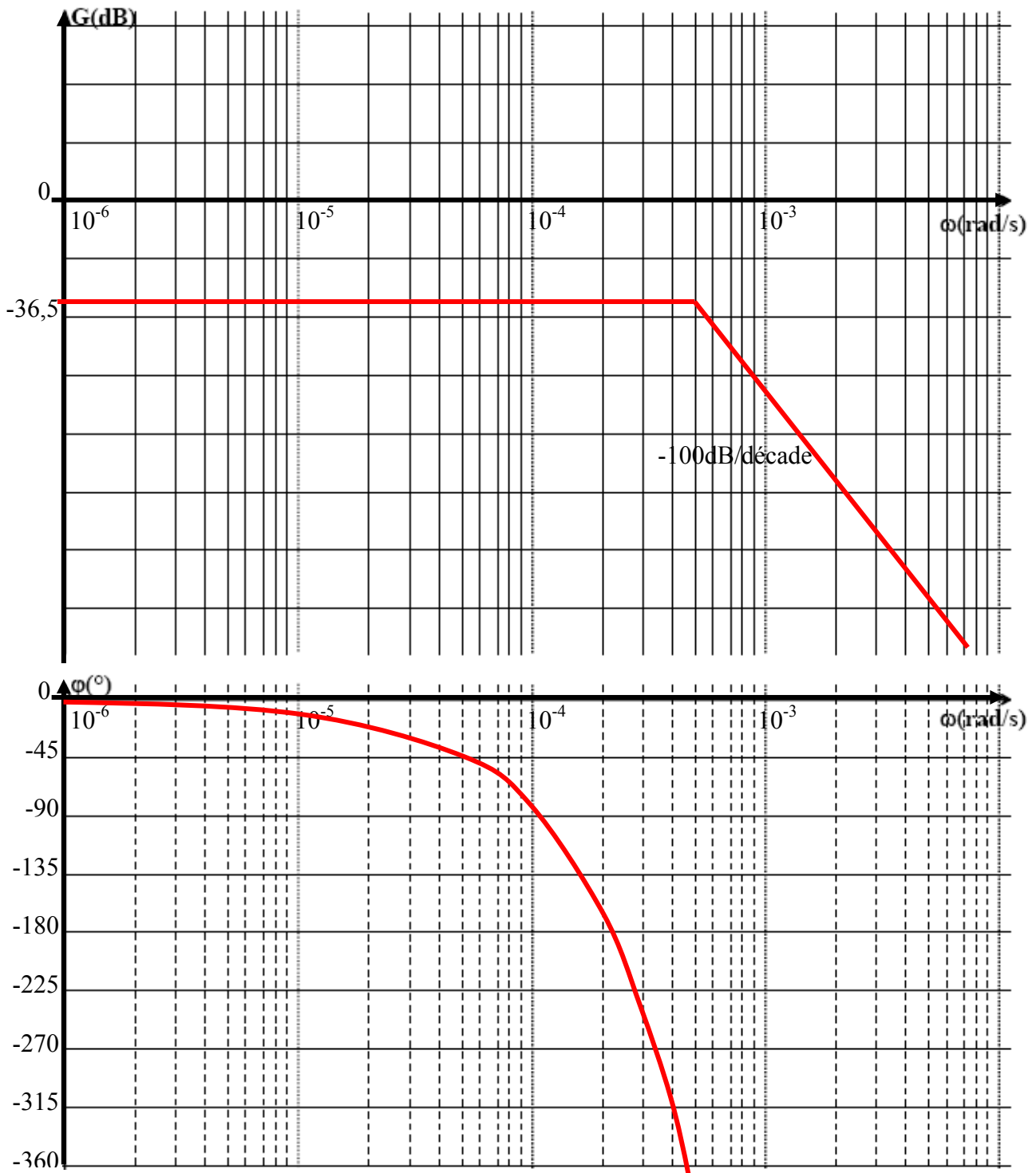
Avant le test le bassin contenait de l'eau non chlorée à 1,25 mg/l. Le pH est maintenu constant pendant l'opération.

La pompe doseuse est commandée par  $V_{com}$  variant de 0 à 10 V.

La concentration en chlore actif de l'eau du bassin passe à 1,4 mg/l à la fin de l'essai.

Figure 11.1

# Document réponse 4 (question 11.4)



# Document réponse 5 (question 11.7)

